Trasformazioni 2D

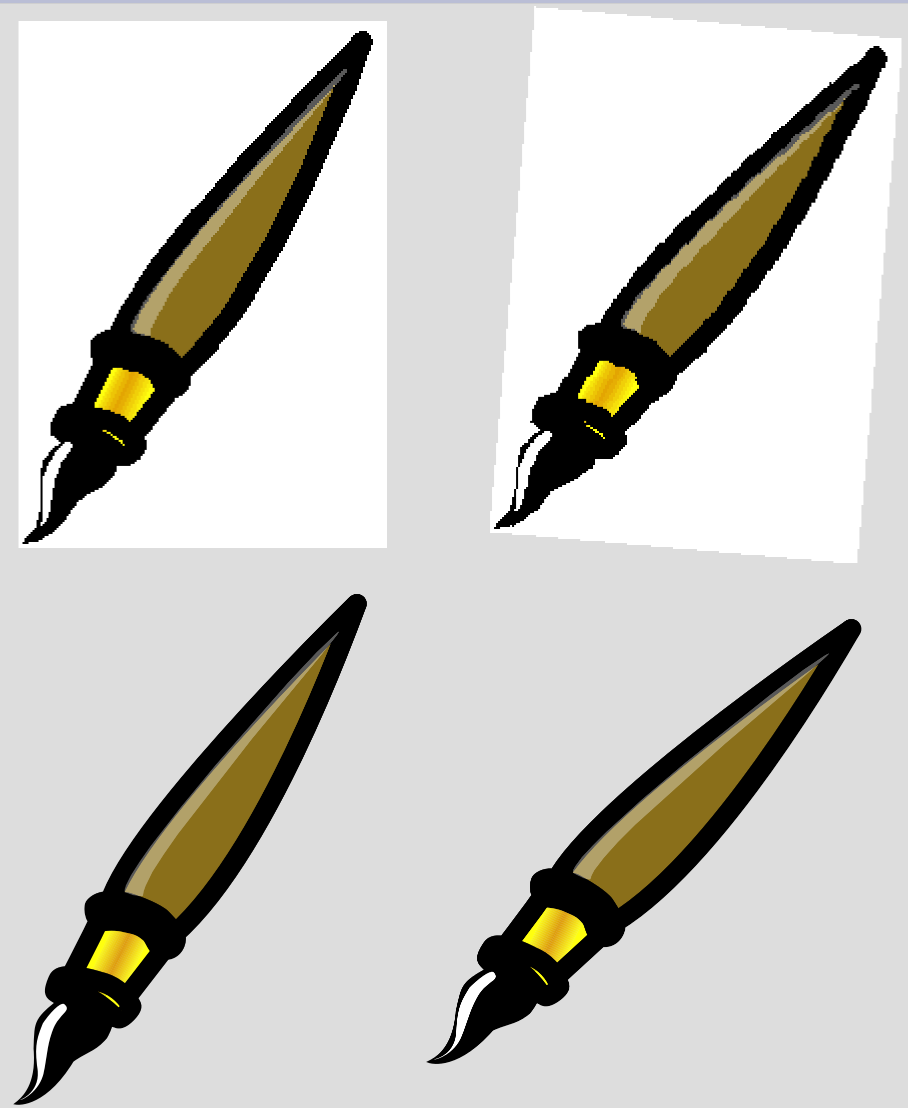
- Il grande vantaggio della grafica vettoriale è che le immagini vettoriali descrivono **entità matematiche**
- È immediato manipolare **matematicamente** tali entità
- In quasi tutte le manipolazioni **non si perde informazione**
  - **Grande differenza rispetto alla grafica raster!**

Trasformazioni 2D

- Un esempio: **ingrandimento**
  - In grafica raster, i pixel diventano visibili, l'immagine è sgranata: cattiva qualità
  - In grafica vettoriale, il risultato rimane perfetto

Trasformazioni 2D

- Un esempio: **rotazione**
  - La stessa cosa accade con una rotazione di pochi gradi: le immagini raster diventano “scalettate”
  - Le immagini vettoriali rimangono intatte



Trasformazioni 2D

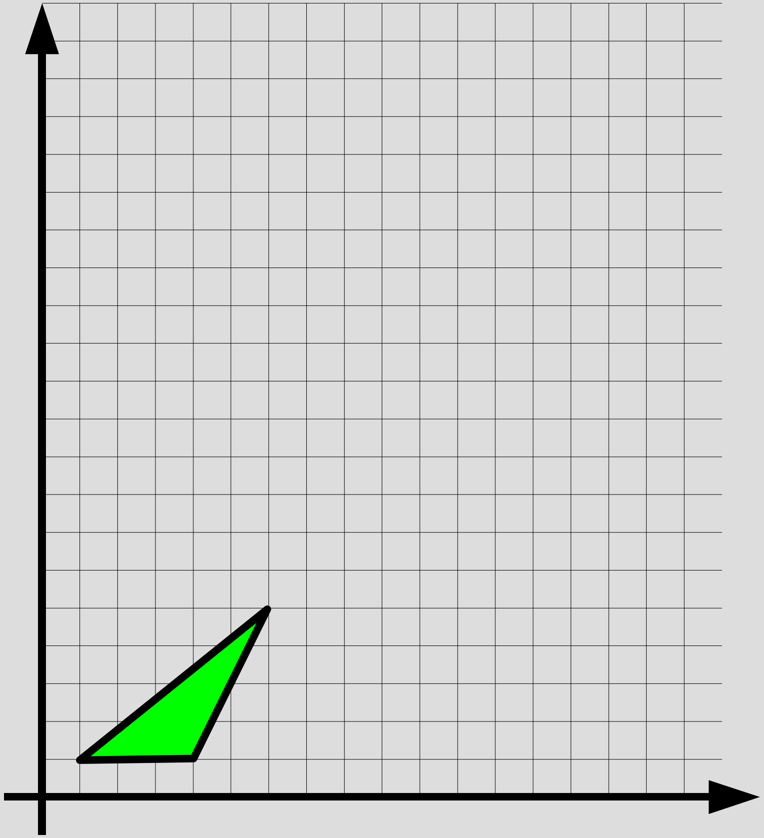
- La ragione di queste differenze risiede nel diverso modo in cui vengono svolte le operazioni su raster e su vettori:
  - su raster, si manipolano i singoli pixel (ingrandendoli, spostandoli), ma poi il risultato deve essere nuovamente approssimato al pixel
  - su vettori, si calcolano le nuove posizioni dei punti di controllo, quindi si ridisegnano curve e altri elementi geometrici ex-novo

Trasformazioni 2D

- **Spostamenti**
  - si somma lo spostamento $\delta=[x\ y]$ a tutti i punti
- **Ingrandimenti**
  - si moltiplicano le coordinate dei punti per il fattore di scala α
- **Rotazioni**
  - si moltiplicano le coordinate dei punti per il seno e il coseno dell'angolo di rotazione θ
- **...**

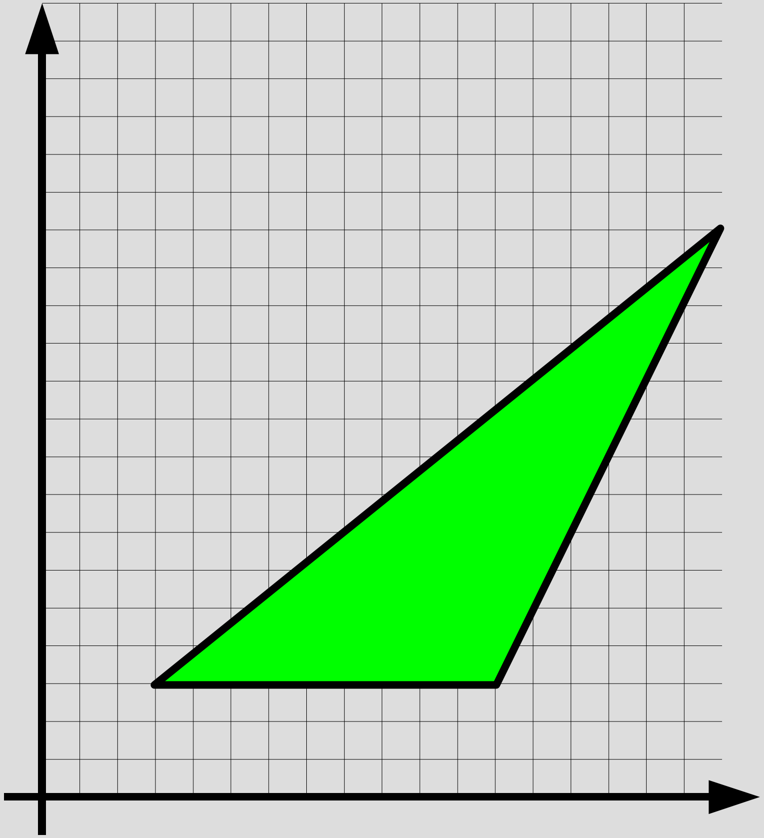
Trasformazioni 2D

- Esempio:
  - triangolo [1,1],[4,1],[6,5]



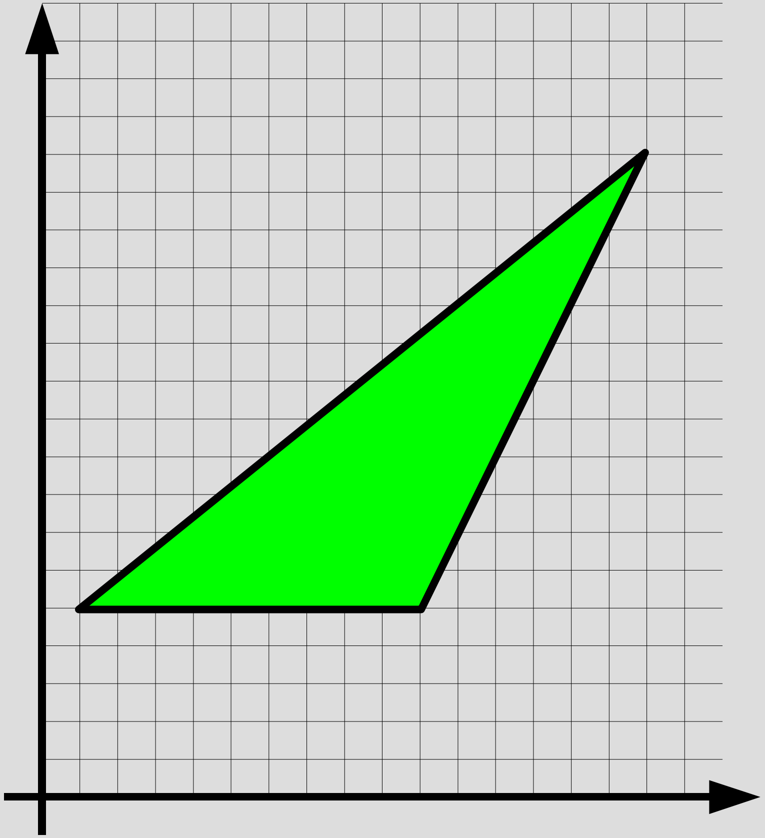
Trasformazioni 2D

- Esempio:
  - triangolo T_0=[1,1],[4,1],[6,5]
- **Scaliamo** con α=3.0
  - triangolo $T_1=\alpha T_0$ T_1=[3,3],[12,3],[18,15]



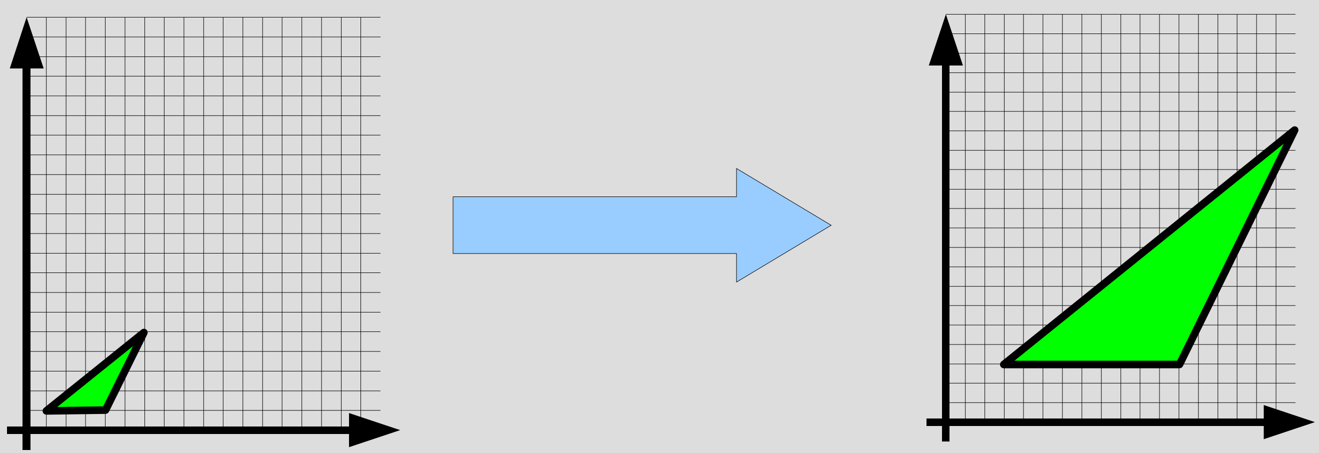
Trasformazioni 2D

- Esempio:
  - triangolo T_0=[1,1],[4,1],[6,5]
- Scaliamo con α=3.0
  - triangolo $T_1=\alpha T_0$ T_1=[3,3],[12,3],[18,15]
- **Trasliamo** di δ=[-2,2]
  - triangolo $T_2=T_1+\delta$
    T_2=[1,5],[10,5][16,17]



Trasformazioni affini

- Abbiamo visto che l'uso delle semplici coordinate cartesiane comporta qualche difficoltà nell'applicazione delle trasformazioni 2D
  - Per esempio: l'ingrandimento “sposta” contemporaneamente l'oggetto ingrandito



Trasformazioni affini

- Una **trasformazione lineare** è una funzione fra spazi che preserva le **combinazioni lineari** (operazioni di *somma* e di *moltiplicazione per scalare)*
- Una **trasformazione affine** è una trasformazione esprimibile come somma di una **trasformazione lineare** seguita da una **traslazione**
- Es.: scalature, traslazioni, rotazioni, riflessioni, *shear* e *skew*

Coordinate omogenee

- Usando le **coordinate omogenee**, tutte le trasformazioni affini possono essere espresse come una semplice **moltiplicazione fra matrici**
- Coordinate di un punto
  - Coordinate cartesiane: [*x* *y*]
  - Coordinate omogenee: [*x* *y* **1**]
    - sarebbero possibili anche altri valori per il terzo elemento, ma 1 è una scelta comoda

Moltiplicazione tra matrici

- Nota: **moltiplicazione tra matrici**
  - date due matrici *A* di dimensione $m \times n$ e *B* di dimensione $n \times p$, il **prodotto** fra *A* e *B* è una matrice *R* di dimensione m×p
  - l'elemento di indice (*i*,*j*) è calcolato come segue:

$$R_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

Moltiplicazione tra matrici

- Esempio: moltiplicazione fra matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- segue banalmente dalla definizione...

Moltiplicazione tra matrici

- Esempio: moltiplicazione fra matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+2\times3+0\times0 & 1\times0+2\times2+0\times1 \\ 3\times2+0\times3+2\times0 & 3\times0+0\times2+2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+2\times3+0\times0 & 1\times0+2\times2+0\times1 \\ 3\times2+0\times3+2\times0 & 3\times0+0\times2+2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+2\times3+0\times0 & 1\times0+2\times2+0\times1 \\ 3\times2+0\times3+2\times0 & 3\times0+0\times2+2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+2\times3+0\times0 & 1\times0+2\times2+0\times1 \\ 3\times2+0\times3+2\times0 & 3\times0+0\times2+2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Traslazione**
  - formulazione in coordinate cartesiane

$$p = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}, \delta = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}: \quad p + \delta = \begin{bmatrix} x+a & y+b \end{bmatrix}$$

  - formulazione in coordinate omogenee

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}: \quad \Delta p = \begin{bmatrix} x+a & y+b & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Scalatura (uniforme)**
  - formulazione in coordinate cartesiane

$$p = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}: \quad \alpha p = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \end{bmatrix}$$

  - formulazione in coordinate omogenee

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}: \quad A p = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Scalatura (non uniforme)**
  - formulazione in coordinate cartesiane

$$p=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}: \ \alpha p=\begin{bmatrix} \alpha_x x & \alpha_y y \end{bmatrix}$$

  - formulazione in coordinate omogenee

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, p=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}: \ A p=\begin{bmatrix} \alpha_x x & \alpha_y y & 1 \end{bmatrix}$$

- quanto i fattori di scala sono -1, si ottengono le riflessioni speculari

Trasformazioni con coordinate omogenee

- **Rotazione**
  - formulazione in coordinate cartesiane

$$p=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}:$$

$$p \text{ rot } \theta=\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

  - formulazione in coordinate omogenee

$$P=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, p=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}:$$

$$P\,p=\begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni con coordinate omogenee

- Il grande vantaggio delle coordinate omogenee è che tutte le trasformazioni diventano **moltiplicazioni**
- Le moltiplicazioni possono essere **combinate** fra di loro, creando operazioni più complesse
  - per esempio: scalatura + traslazione in una sola operazione
- La combinazione si fa moltiplicando fra loro le matrici delle operazioni

Trasformazioni con coordinate omogenee

- Siano M_1 e M_2 due matrici di trasformazione, e P un punto (in coordinate omogenee)
- Il prodotto $M_1 \times M_2 \times P$ è la rappresentazione, sempre in coordinate omogenee, del punto ottenuto applicando a P prima M_2 e poi M_1
- La matrice $M = M_1 \times M_2$ è una matrice di trasformazione che rappresenta la combinazione delle due operazioni

Trasformazioni con coordinate omogenee

- Esempio: scalatura di 3 e (poi) traslazione di [1 5]:

$$\Delta=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}: \quad \Delta\times A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

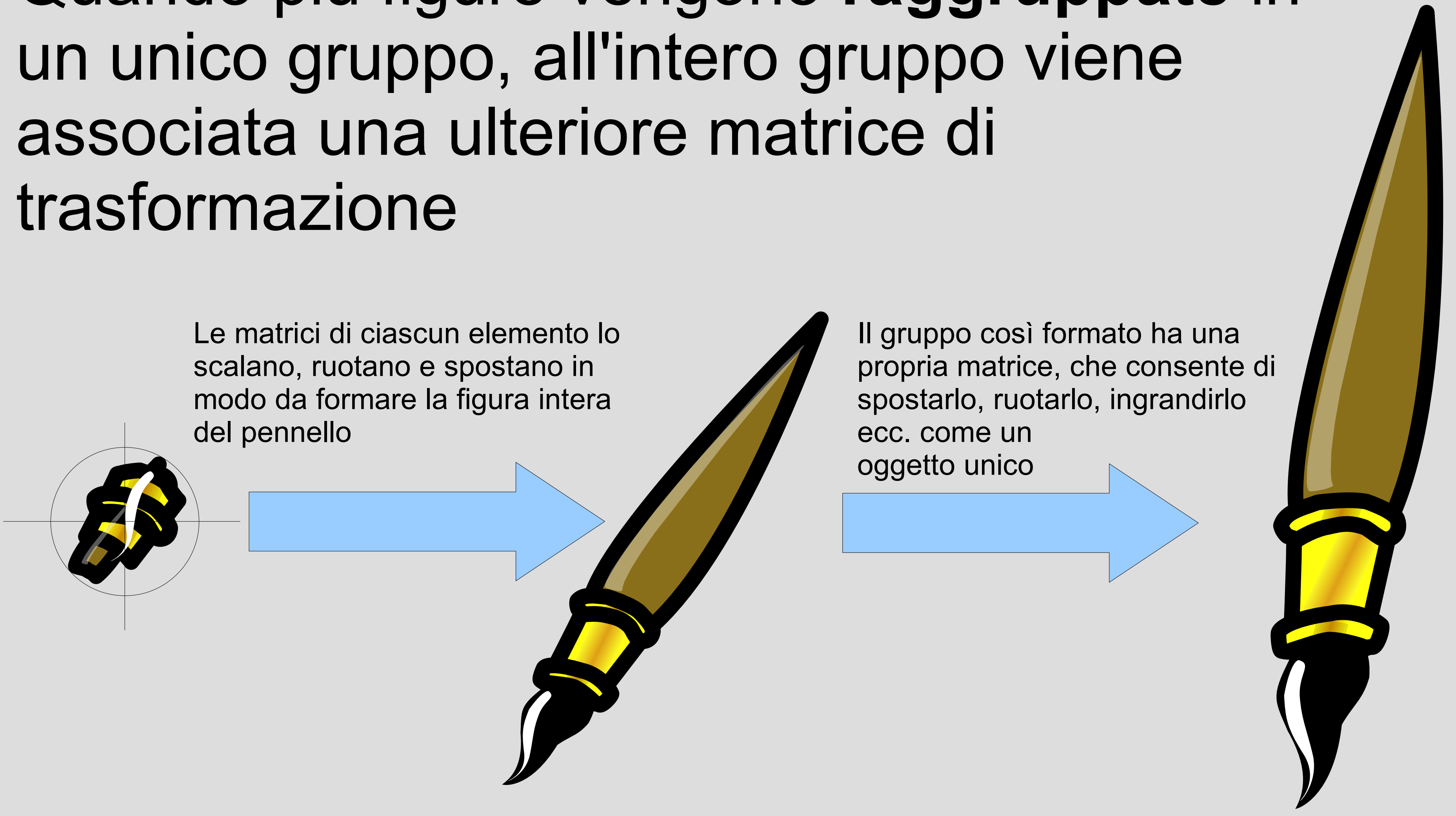
- In genere, si assume **sempre** che le figure siano, per esempio, disegnate intorno all'origine (0,0) e grandi quanto basta per stare in un cerchio di raggio 1
- Poi, si moltiplica per una opportuna matrice per portare la figura “a posto”

Trasformazioni con coordinate omogenee

- Molte operazioni di disegno (spostamenti, rotazioni, ingrandimenti) fatte con i programmi di disegno vettoriale **non** modificano la posizione dei punti!
- Si limitano a cambiare la matrice di trasformazione associata alla figura!
  - di solito include traslazione, rotazione, scalatura, shear, skew, riflessione

Trasformazioni con coordinate omogenee

- Quando più figure vengono **raggruppate** in un unico gruppo, all'intero gruppo viene associata una ulteriore matrice di trasformazione



Trasformazioni con coordinate omogenee

- Analogamente, gli interpreti dei linguaggi di grafica vettoriale (motori di rendering) contengono istruzioni speciali per stabilire le matrici di trasformazione
- In genere, esiste il concetto di **matrice di trasformazione corrente**, che viene applicata a tutti i punti disegnati
- Il disegno decide quando moltiplicare altre matrici (componendo le trasformazioni) o ripristinare la matrice precedente

Esercizio

- Scrivere le matrici di trasformazione per:
  - ingrandire di un fattore 2 lungo l'asse x e di un fattore 4 lungo l'asse y
  - spostare di 2 unità a destra lungo l'asse x e di 2 unità in basso lungo l'asse y
  - ribaltare specularmente lungo l'asse orizzontale
- Moltiplicare fra loro queste matrici in modo che le operazioni vengano applicate nell'ordine dato sopra e scrivere la matrice di trasformazione risultante

Esercizio

- Applicando ora la matrice risultante, si disegni nuovamente il path costruito unendo le due Bezier cubiche seguenti (esercizio della lezione precedente):
  - Primo segmento:
    [0,0], [0,5], [5,5], [5,0]
  - Secondo segmento:
    [5,0], [5,-5], [10,-10], [10,0]
- Si confrontino visivamente le due curve (originale e trasformata). Il risultato coincide con le aspettative?